Révisions d'Algèbre

I. Préambule

Mode d'emploi du cours

Imprimez ces pages (de préférence en recto verso), agrafez les feuilles ainsi obtenues (ou reliez-les d'une façon efficace) et apportez-les en classe pendant tout le premier trimestre. Avant que nous n'abordions un nouveau paragraphe d'exercices, lisez et relisez attentivement, plume à la main, la partie du cours correspondante. Le **vocabulaire mathématique** introduit ou rappelé doit être maîtrisé. Les théorèmes et définitions encadrés doivent être sus par cœur. Notez vos questions.

Mode d'emploi des exercices

Systématiquement, il vous faudra contrôler votre réponse dès que vous l'aurez écrite. Si erreur il y a, votre mission sera de trouver où elle se situe précisément et de comprendre en quoi elle en est une (d'erreur). C'est là qu'une intervention extérieure s'avèrera peut-être indispensable. N'effacez pas vos calculs erronés (jamais). Ne sautez pas d'étape. Et puis écrivez lisiblement, même au brouillon. Pour progresser, il vous faudra aussi réviser, vous entraîner. Pour cela, refaites les questions où vous avez commis des erreurs en première instance.

II. Lecture

L'oral et l'écrit

Vous devez savoir *prononcer* ce que vous écrivez, en algèbre.

Forme

Donner la **forme** d'une expression, c'est dire s'il s'agit d'une somme, d'une différence, d'un produit, d'un quotient…

Opération	Expression	Forme / Résultat	Nom des termes
addition	$a+b$	**somme algébrique**	« termes algébriques »
	$a+b+c$		
	$a-b+c$		
	$a-b$		
multiplication	ab	**produit**	**facteurs**
	abc	**« poly-produit »**	
division	$\frac{a}{b}$	**quotient**	**dividende, diviseur** (**numérateur, dénominateur**)

Conventions

- Ce sont d'abord les **parenthèses**, crochets, accolades, qui nous indiquent comment sont groupés les termes d'une expression. En l'absence de parenthèses, voici donc quelles règles décrètent la façon dont on doit lire une expression :

- Lorsqu'il n'y a **que des** ×, l'expression prend la forme de ce que j'appelle un « **poly-produit** ». Par exemple : « 2×3×4×5 ». Or dans un « poly-produit », on peut grouper les termes comme on veut sans que cela n'ait d'incidence sur le résultat.

- Lorsqu'une expression **mélange les signes +, – et** ×, le signe × colle les termes et que les signes + et – les séparaient :

  « $2+3\times4$ » se lit « deux plus, … trois-fois-quatre » et signifie donc : $2 + (3\times4)$.

  Si l'on calcule l'expression, on commencera par la multiplication. C'est ce qui fait dire que la multiplication est *prioritaire*.

- Lorsque des termes sont **juxtaposés**, c'est-à-dire posés l'un contre l'autre, collés, lorsqu'il n'y a aucun signe pour les séparer, il faut considérer qu'il y a une multiplication. Je parlerai de **« juxtaposition multiplicative »** :
  - 2*a* se lit « deux-z-a » (avec la liaison). Et signifie deux fois *a*.
  - *ab* signifie de même *a* fois *b*.
  - 2*ab* est donc un « poly-produit » : 2×*a*×*b*.
  - $a(b+c)$ se lit « *a*, **facteur de**, *b*-plus-*c* » et signifie : $a\times(b+c)$.

  - $(a+b)(c+d)$ se lit « *a*-plus-*b*, **facteur de**, *c*-plus-*d* » et signifie : $(a+b)\times(c+d)$.

Lire ainsi « facteur de » sert à faire entendre qu'il y a des parenthèses.

On n'écrit pas « *a*5 », mais « 5*a* », car « *a* cinq » signifie « *a* puissance 5 ». À la lecture, il y aurait donc ambiguïté.

- Lorsqu'il n'y a **que des + et des –** entre les termes (mais pas de parenthèses), l'expression est une **somme algébrique**. Elle doit se lire en marquant une pause avant les signes + et – :

  « 5 – 6 + 3 » se lit : « 5 –6 +3 », « cinq, … moins-six, … plus-trois ».

Nous verrons dans le paragraphe *Somme Algébrique*, que cette pause marque une addition entre des nombres relatifs. Ainsi, « **5 –6 +3** » signifie : (**+5**) + (**–6**) + (**+3**).

- **–2*a*** peut être vu soit comme l'opposé de 2*a*, soit comme –2, multiplié par *a* : $-2a=-(2a)=(-2)\times a$

- Le **trait de fraction**, par sa taille et sa position sur la ligne, indique comment les termes sont groupés et joue dont un rôle de parenthèses :

  $\dfrac{a+b}{c}$ se lit : « *a*-plus-*b*, … sur *c* », alors que :

  $a+\dfrac{b}{c}$ se lit : « *a* plus, … *b*-sur-*c* ».

- L'exposant (puissance) est prioritaire sur tout le reste, y compris le *moins opposé* :

- $-a^2$ se lit plutôt « moins a **deux** » et signifie $-aa$ et non $(-a)(-a)$.
  Pour signifier $(-a)(-a)$, il faut écrire $(-a)^2$, qui se lira plutôt « moins a **au carré** ».
- $2a^3$ se lit plutôt « deux a **trois** » et signifie $2aaa$ et non $(2a)(2a)(2a)$. Pour signifier $(2a)(2a)(2a)$, il faut écrire $(2a)^3$, qu'on lira plutôt « deux a **au cube** ».

III. « Poly-produit »

Résumé Un « **poly-produit** » est une expression du genre 2×3×4. Pour la calculer, il faut y placer des parenthèses et s'y prendre en plusieurs étapes.

Calcul Pour calculer le « poly-produit », 2×3×4, il faut choisir de placer les parenthèses d'une façon ou d'une autre. L'ambiguïté qui provenait de l'absence de parenthèses n'est pas gênante, puisque le résultat est le même dans les deux cas :

(2×3)×4	2×(3×4)
= 6×4	= 2×12
= **24**	= **24**

Exemples Le principe reste le même pour tous les « poly-produits » : il faut mettre des parenthèses (ou crochets) quelque part et calculer en plusieurs étapes :

$$-2(x-1)(x+1) = -2[(x-1)(x+1)] = \dots$$
$$(x-1)(x-2)(x+1) = (x-2)[(x-1)(x+1)] = \dots$$

Déplacement d'un terme

<u>À l'intérieur</u> d'une « poly-somme » ou d'un « poly-produit », on peut déplacer un terme :

Pour calculer $2\times3\times4\times5$, on peut se simplifier la vie en regroupant le 2 et le 5 :

$$2\times3\times4\times5 = (2\times5)\times(3\times4) = 10\times12 = \boxed{120}$$

Décomposition en facteurs premiers

Arithmétique

Le mot **arithmétique** vient du grec *arithmos*, qui signifie *nombre*. Mais seulement au sens restreint de nombre <u>*entier*</u>. Même *un*, l'unité, nommée *monas*, n'était pas classé dans les *arithmos*. Non contents de nous limiter aux entiers à partir de 2, nous allons aussi nous limiter à une opération : la multiplication. De façon un peu abusive, nous définirons ici l'arithmétique comme un petit îlot où seuls existent les nombres entiers à partir de 2 et où la seule opération disponible est la multiplication. À partir d'ici, plaçons-nous donc en *arithmétique*.

Décomposition

Lorsqu'on passe de 2×3 à 6, on fait un *calcul*. On pourrait dire que pour former le tout, qui est le nombre 6, on a pris deux éléments séparés, 2 et 3 que l'on a assemblés, comme on *compose* un bouquet avec des fleurs en *posant* des fleurs *ensemble*.

Lorsqu'on passe de 6 à 2×3, on essaye de retrouver les facteurs qui ont permis de former le 6. On essaye de retrouver les éléments qui ont formé un tout. C'est le contraire de *composer* : cela s'appelle **décomposer**.

Décomposons à présent le nombre 12. Il y a deux façons de commencer : $2{\times}6$ ou $3{\times}4$.
Dans le premier cas, on peut encore décomposer le facteur 6. Dans le second cas, on peut encore décomposer le facteur 4. Poursuivons la décomposition aussi loin que possible :

$$\begin{aligned} 12 &= 2\times 6 \\ &= 2\times(2\times 3) \\ &= \underline{2\times 2\times 3} \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} 12 &= 3\times 4 \\ &= 3\times(2\times 2) \\ &= \underline{2\times 2\times 3} \end{aligned}$$

Dans les deux cas, on parvient à la <u>même</u> décomposition. Ce n'est pas un hasard : un théorème important d'arithmétique (pas très facile à prouver) nous garantit l'unicité de cette décomposition. Les facteurs 2 et 3, qui ne sont pas décomposables étaient en quelque sorte cachés dans le nombre 12. Ce sont eux qui constituent arithmétiquement le nombre 12. Ces nombres non décomposables peuvent être vus comme les entiers qui étaient là <u>en premier</u> et à partir desquels, par multiplication, les autres entier ont été engendrés. On les appelle pour cela des **nombres premiers**. Et la décomposition dont nous venons d'exposer le principe s'appelle **décomposition en facteurs premiers**.

NOMBRES PREMIERS

Un nombre premier est donc *arithmos* qu'on ne peut pas écrire comme un produit de deux *arithmos*, donc un nombre entier qui n'est pas divisible, sauf par 1 et par lui-même.
Afin que le théorème portant sur l'unicité de la décomposition soit énonçable facilement, on ne souhaite pas classer le nombre 1 parmi

les nombres premiers. Comme le mot *arithmos* n'est pas utilisé en français, les mathématiciens ont trouvé un subterfuge pour définir simplement un nombre premier : *n nombre premier est un entier qui a exactement <u>deux</u> diviseurs.* (1 et lui-même).

IV. SOMME ALGÉBRIQUE

RÉSUMÉ

Une **somme algébrique** est une expression du genre : $2 - 3 + 4$. Il n'y a là-dedans aucune soustraction ; seulement des additions. C'est en fait : $+2$ … -3 … $+4$, où les points de suspension représentent de l'addition.

LES SIGNES MOINS

Il y a *trois* signes moins, qui, par ordre chronologique de leur apparition à l'école, sont :

- Le **« moins soustraction »** : « 10 — 5 »
- Le **« moins négatif »** : « -5 »
- Le **« moins opposé »** : « $-A$ », « $-(2+2)$ »

Si l'on s'autorise à rétrospectivement les confondre, c'est simplement que tous trois peuvent (et doivent) être vus comme des *moins opposés.* En effet, « -5 » est l'opposé de 5 et « 10 — 5 » peut (et doit) être vu comme 10 et… l'opposé de 5 : $10 - 5$ doit être vu comme une somme dont le signe *plus* n'est pas marqué et où le signe *moins* est collé au 5 : 10 … -5.

Il y a symétriquement trois signes « + », qui peuvent tous être ramenés au dernier cas :

- Le **« plus addition »** : « $2+2$ »
- Le **« plus positif »** : « $+2$ »
- Le **« plus neutre »** (qui ne fait rien) : « $+a$ »

PRINCIPE

Une **somme algébrique** est une succession de termes séparés par des « + » et de « − ». Exemple : « $a-b+c$ ».

« $a-b+c$ » doit se lire : « a, … $-b$, … $+c$ »,

où les silences marquent des additions alors que les signes + et − sont des *plus neutre* et *moins opposé*.

$a-b+c$ signifie en fait : $(+a)+(-b)+(+c)$.

« ESPACES ADDITIVES »

Par écrit, on pourra représenter ces pauses par des **« espaces additives »** (en typographie, le mot « espace » est féminin).

<u>Tout « *signe algébrique* » (signes + et −) doit être vu comme étant précédé d'une « espace additive »</u>.

N'hésitez pas à marquer ces espaces par écrit, notamment lorsque vous recopiez l'expression d'un énoncé. Vous éviterez ainsi beaucoup d'erreurs. C'est d'ailleurs ce que je fais souvent dans le corrigé. Par exemple, en recopiant « $1-3a(1-3a)+3a$ », écrivez :

$$+1 \qquad -3a(\ +1 \ \ -3a) \qquad +3a$$

(Cette somme algébrique est composée de <u>trois</u> termes.)

Nous appellerons les termes de la somme algébrique, considérés <u>avec leur signe</u> algébrique, bien entendu ! des **« termes algébriques »**,

tout simplement.

Attention à bien distinguer l'espace additive de la juxtaposition multiplicative :

Espace additive

$(-2)-3$ s'écrit $(\ -2)\ \ -3$. C'est une somme algébrique.

$-3(-2)$ s'écrit $-3(\ \ -2)$. C'est un produit.

Juxtaposition multiplicative

DÉPLACEMENT D'UN « TERME ALGÉBRIQUE »

On peut déplacer un « terme algébrique », mais attention ! <u>à l'intérieur de sa somme algébrique</u> et <u>avec son signe algébrique</u> !

Exemple :

$$-2a \ +5b \ +5a \ -3 \ = \ (-2a \ +5a) \ +5b \ -3$$
$$= \boxed{+3a \ +5b \ -3}$$

V. RÉDUCTION

MONÔMES

Un **monôme** est constitué de deux parties : le **coefficient**, qui dit « combien il y en a » et l'**unité**, qui nomme ce que l'on compte.

Exemples :

coefficient	unité	type d'unité
5	uns	unité numérique
3	x	unité littérale
-5	ab	unité littérale
$\frac{9}{10}$	x^5	unité littérale
5	$\sqrt{2}$	unité irrationnelle (voir page 34).
7	quarts	unité fractionnaire
9	cm	unité de longueur

On met toujours le *coefficient* devant. Ainsi, on n'écrit pas « $a5$ », mais « $5a$ », car « a cinq » signifie « a puissance 5 ». À la lecture, il y aurait donc ambiguïté. (Déjà dit page 4.)

Monôme avec signe

$-2a$ peut indifféremment être vu comme $(-2)a$ ou comme $-(2a)$. Ces deux expressions ont toujours la même valeur. On peut même dire que la règle des signes de la multiplication des nombres relatifs est faite pour garantir cette « pseudo-associativité ». (Cf. p4)

Somme

Le théorème suivant ne concerne que les cas où l'unité est littérale.

> Pour réduire (c'est-à-dire calculer) une somme de monômes, il faut qu'ils aient la même unité. Une somme de monômes qui n'ont pas la même unité est **irréductible**.

Exemples

$3x + 2x = 5x$ sur le modèle de 3 patates + 2 patates = 5 patates.

$-5x^2 + 3x^2 = -2x^2$ les coefficients sont des nombres relatifs, mais le principe est le même.

$2x^2 + 5x$ est irréductible.

$x^2 + x$ est irréductible. C'est $1x^2 + 1x^1$.

$3x + 5 = 3x + 5$**uns**. C'est donc irréductible.

Produit

> On peut toujours calculer un produit de monômes. On multiplie les coefficients entre eux et les unités entre elles.

Exemple

$(-3x^2)(-2x) = +6x^3$

Explication

Il faut voir le produit de deux monômes comme un « poly-produit ».

$$\begin{aligned}(-3x^2)(-2x) &= (-3) \times x^2 \times (-2) \times x \\ &= (-3) \times (-2) \times x^2 \times x \\ &= \mathbf{+6x^3}\end{aligned}$$

L' « un-plicite »

Souvent, le nombre 1 est présent sans être dit. Par exemple, on dit « trois cents », « deux cents », mais pas « **un** cent ». Ou encore dans « deux tiers », on ne précise pas qu'on veut dire « deux tiers **de un** ». Le nombre 1 peut être **implicite** en tant que coefficient, exposant, diviseur, ou même en tant qu'unité :

$$a = \frac{1a^1}{1}\text{uns}$$

Certaines erreurs peuvent être évitées simplement en explicitant le nombre 1. Voici quelques exemples :

Erreur :	Façon de l'éviter :
$a^2 + a^3 \not\longrightarrow a^5$	$a^2 + a^3 = \mathbf{1}a^2 + \mathbf{1}a^3$ (irréductible)
$a^5 \times a \not\longrightarrow a^5$	$a^5 \times a = a^5 \times a^{\mathbf{1}} = a^6$

$a\times\frac{b}{c} \nrightarrow \frac{ab}{ac}$ $\qquad$ $a\times\frac{b}{c}=\frac{a}{\mathbf{1}}\times\frac{b}{c}=\frac{ab}{c}$

$3x + 1 \nrightarrow 4x$ $\qquad$ $3x$ + **1uns** est irréductible

VI. DÉVELOPPEMENT

LA DISTRIBUTIVITÉ

Les facteurs se distribuent sur les sommes, pas sur les produits.

EXEMPLES :

$a(b+c)=ab+ac$

$a(b-c)=ab-ac$

$(b+c+d)\times a=ab+ac+ad$

$a(b-c+d)=ab-ac+ad$

En revanche : $a(b\times c)$ n'est pas la même chose que $ab\times ac$. En effet, pour prendre un **contre-exemple**, **le double de 10×10 n'est pas égal à 20×20**. Multiplier un produit par un nombre revient à multiplier par ce nombre l'un seulement de ses facteurs. Pour éviter de distribuer abusivement, il convient de « nettoyer » le « $a(b\times c)$ » en le débarrassant de ses signes inutiles, pour le ramener à sa plus simple expression : *abc*. Ce n'était qu'un « poly-produit ».

COMMENTAIRE

Le mot « somme » doit s'entendre au sens large : somme, différence, poly-somme, somme algébrique.

DÉVELOPPER

Développer est un mot qui, dans un texte mathématique signifie *distribuer* les termes (d'une expression) et non pas « détailler les calculs ». Et d'ailleurs, à l'écrit, au moment où vous distribuez, pour une fois, ne détaillez pas trop vos calculs, justement : <u>calculez directement les produits de monômes</u> :

$$-3x\left(-2x^2+5x-1\right)$$

$$=\cancel{(-3x)\times(-2x^2)+(-3x)\times(+5x)+(-}$$

SAUTEZ CETTE ÉTAPE !

$$=\boxed{+6x^3-15x^2+3x}$$

Il ne faut pas non plus, lors du développement, écrire les + opératoires. Ce sont les « espaces additives » qui se chargent de l'addition ! Ainsi, en développant $2a\ (\ 3a\ -\ 5b)$, n'écrivez pas : $6a^2+-10ab$, mais simplement : $6a^2\quad -10ab$.

Encore une chose : lorsqu'un exercice demande de « développer », il est sous-entendu qu'il demande de développer <u>et de réduire</u>.

LA « DOUBLE DISTRIBUTION »

Pour **développer** un produit de deux sommes, on distribue chaque terme de la première somme sur chaque terme de la seconde.

EXEMPLE

$(\ a+b\ )(\ c+d+e\ )=ac+ad+ae+bc+bd+be$

DÉMONSTRATION

On utilise à deux reprises la distribution « simple ». Dans un premier temps on considère le second facteur comme un « bloc » :

$(\ a+b\ )(\ c+d+e\ )\ =\ (\ a+b\ )\mathbf{(c+d+e)}$

$$= a(c+d+e) \;+\; b(c+d+e)$$

$$= ac + ad + ae + bc + bd + be$$

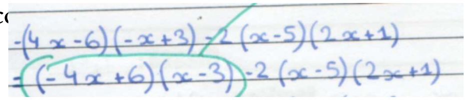
LE MOINS OPPOSÉ

Le signe *moins opposé* peut être vu comme un « $(-1)\times$ », il est donc normal qu'il se comporte comme un facteur et se distribue sur les sommes, pas sur les produits.

Exemple : $-(a-b+c) \;=\; -(+a\;\; -b\;\; +c) \;=\; -a\;\; +b\;\; -c$

Opposé de

Voici une erreur de distribution abusive d'un moins sur un produit, renc



$$-(4x-6)(-x+3) \;\not\longrightarrow\; (-4x+6)(x-3)$$

L'erreur consiste à distribuer le *moins opposé* sur les deux termes du produit : $-(AB) \not\longrightarrow (-A)(-B)$. Dans ce sens, on pourrait croire que c'est juste, mais lisez-la dans l'autre sens : $(-A)(-B) \not\longrightarrow -(AB)$ et l'erreur devrait vous apparaître plus clairement, puisque vous savez bien que « − par − donne + » : $(-A)(-B)=+AB$.

On évite cette distribution abusive du *moins opposé* sur un produit en voyant ce *moins opposé* comme un $(-1)\times$:

$-(AB)=(-1)\times(A\times B)=(-1)\times A\times B = \ldots$

LES DISTRIBUTIVITÉS

Complétons la règle de la distributivité énoncée plus haut :

> Les facteurs se distribuent sur les sommes, pas sur les produits.
>
> Les *exposants* se distribuent sur les produits, <u>pas sur les sommes</u>.

Rappelons qu'un *exposant*, c'est le 3 dans « 2^3 ».

EXEMPLES :

$a(b-c+d)=ab-ac+ad$

$(ab)^3=ababab=aaabbb=a^3b^3$

$\left(\dfrac{a}{b}\right)^2=\dfrac{a}{b}\times\dfrac{a}{b}=\dfrac{aa}{bb}=\dfrac{a^2}{b^2}$

En revanche :

- $a(b\times c)$ n'est <u>pas</u> égal à $ab\times ac$.
- $(a+b)^3$ n'est <u>pas</u> égal, en général, à a^3+b^3. Le cube de la somme n'est pas la somme des cubes. Il est possible de développer $(a+b)^3$ (« a plus b … au cube »), mais pour cela, il faut revenir à la définition des puissances et écrire l'expression : $(a+b)(a+b)(a+b)$. Ensuite, puisqu'il s'agit d'un « *poly-produit* », on doit le calculer en plusieurs étapes : $(a+b)\left[(a+b)(a+b)\right]=\ldots$

Nous disons qu'un opérateur se distribue sur les produits pour dire qu'il se distribue sur les produits et les quotients. Et nous disons qu'un opérateur se distribue sur les sommes pour dire qu'il se distribue sur toute somme algébrique. De cette façon, les deux phrases ci-avant encadrées couvrent une très large part des questions de distributivité qu'on peut rencontrer en seconde.

DISTRIBUTION NAÏVE

Pour schématiser, on peut dire qu'une bonne moitié des erreurs d'algèbre effectivement rencontrées dans les copies peuvent être vues comme des distributions naïves. Parfois, l'erreur est faite sans même que celui qui la commet perçoive qu'il a procédé à une transformation : la distribution n'est même pas perçue comme telle, elle est totalement *transparente* à son auteur. Dans la langue courante en effet, « la cousin de Jules et de Barnabé », est à la fois le cousin de Jules et celui de Barnabé. En mathématiques, le carré de… a plus b, ce n'est pas la même chose que le carré de a plus celui de b. Lorsqu'on écrit « le carré de $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ », le *plus* ne doit pas se lire comme une simple conjonction « *et* ». Le signe opératoire est en effet chargé de souder ensemble deux termes pour former <u>un seul</u> objet : le résultat. Le signe + fait de deux « parts » une seule somme. Il faut donc bien penser « $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ » comme <u>un seul nombre</u>. De même que, lorsqu'on écrit « 5+3 », on a <u>déjà</u> écrit le résultat de l'addition. « 5+3 » est une façon d'exprimer le nombre 8, sous la forme d'une somme. il est vrai d'affirmer, par exemple : « 5+3 est un nombre pair », alors que ni 5 ni 3 ne le sont.

Espérons que ce qui précède aidera à éviter les erreurs courantes du type : $(a+b)^2 \longrightarrow a^2+b^2$

Ou encore : $\sqrt{a+b} \longrightarrow \sqrt{a}+\sqrt{b}$

Ou encore : $\sqrt{a^2+b^2} \longrightarrow a+b$

Pour développer $(a+b)^2$, il faut revenir à la définition du carré d'un nombre : $(a+b)^2=(a+b)(a+b)$. Ensuite, on peut distribuer terme à terme. On peut aussi utiliser le raccourci d'une *identité remarquable* (voir plus loin).

VII. DEGRÉ

DEGRÉ D'UN MONÔME

Dans un *monôme*[1] dont l'unité est littérale, le nombre de facteurs de l'unité est le **degré** du monôme :

$-3aaabb$ est un monôme de degré 5.

$3ab^2c$ est un monôme de degré 4.

$5a^3$ est un monôme de degré 3.

Lorsqu'il n'y a qu'une variable, le degré correspond à l'exposant portant sur cette variable.

« 12 » pouvant être vu comme « $12x^0$ », on considère que c'est un monôme de degré zéro.

POLYNÔME

Une somme de monômes est un **polynôme**.

Exemple : $-3x^2+5x-4$ est un *polynôme*.

DEGRÉ D'UN POLYNÔME

Le **degré** d'un polynôme est, par définition, le plus grand *degré* de ses monômes. (Une fois l'expression développée et réduite.)

$-5ab^2+4a^2b^3+3a^2b^2$ est un polynôme à deux variables, de degré 5. En effet, ses monômes sont respectivement de degrés 3, 5 et 4. Le plus grand est 5.

$-2x^3+3ab^2c$ est un polynôme de degré 4.

$5x^3-\frac{3}{7}x^2+5x+1$ est un polynôme à une variable, de degré 3.

[1] Pour la notion de *monôme*, indispensable ici, lire le paragraphe sur la *Réduction*.

Dans un polynôme, on classe traditionnellement les monômes par degré décroissant. Si par exemple on a le polynôme $-2x+x^2+1$, il vaut mieux penser à l'écrire : x^2-2x+1.

VIII. FACTORISATION

DÉFINITION

Factoriser, c'est le contraire de *développer*. Et *développer*, je vous rappelle que c'est *distribuer*.

$$\xrightarrow{\textbf{développement}}$$

Exemple : $$\underbrace{a(b+c+d)}_{\text{produit}} = \underbrace{ab+ac+ad}_{\text{somme}}$$

$$\xleftarrow[\textbf{factorisation}]{}$$

EXEMPLE D'UN CAS SIMPLE

Factorisons $ab - ac + ad$

On commence par repérer le **facteur commun** aux trois « termes algébriques », celui qui est susceptible d'avoir été distribué est le « a ».
C'est donc lui qui devait être *mis en facteur*.
On commence donc par écrire : $a(\qquad)$
Puisqu'il faut retrouver, par distribution du a, une somme algébrique de trois termes, il doit y avoir une somme algébrique de trois termes dans les parenthèses : $a(\quad - \quad + \quad)$
Il reste à remplir les places vides : $a(\ b\ -c\ +d)$.

À la fin, il faut vérifier qu'en développant, on retrouve la somme donnée au départ.

AUTRE CAS SIMPLE

Factorisons $(x-1)(3x+5) + (x-1)(2x+4)$

Ce genre d'expression est déjà à moitié factorisée. Il faut résister à la tentation de la développer, car ce serait revenir en arrière (on ne tenterait cette méthode qu'en dernier recours).
L'expression, qui est de la forme $AB + AC$, se factorise facilement par la méthode vue au paragraphe précédent : $AB + AC = A(B + C)$
Il suffit de considérer que A représente l'expression $(x-1)$, que B représente $(3x+5)$ et que C représente $(2x+4)$. Ainsi, l'égalité précédente devient, par **substitution** :

$$\underbrace{(\boldsymbol{x-1})}_{A}\underbrace{(3x+5)}_{B} + \underbrace{(\boldsymbol{x-1})}_{A}\underbrace{(2x+4)}_{C}$$

$$= \underbrace{(\boldsymbol{x-1})}_{A}[\underbrace{(3x+5)}_{B} + \underbrace{(2x+4)}_{C}]$$

Il reste à réduire l'expression entre crochets (mais sans développer ! car cela déferait tout le boulot) :

$$= (x-1)(3x+5+2x+4)$$
$$= \boxed{(x-1)(5x+9)}$$

AUTRES CAS

Ensuite, il faut faire des exercices et voir au cas par cas. Posez des questions dès que vous ne comprenez pas.

IX. IDENTITÉS REMARQUABLES

IDENTITÉ

Une **identité** est une égalité toujours vraie, c'est-à-dire vraie pour toutes les **valeurs** qu'on peut donner à ses **variables**.

Exemples : $x = x$

$ab = ba$

$a(b + c) = ab + ac$

$x + x + x = 3x$

Rappelons le sens du nom « variable ». En algèbre, dans une expression, une lettre représente un nombre. Ce nombre est la **valeur** de la lettre. Lorsque cette valeur est fixe, comme pour π, la lettre est appelée **constante**. Mais le plus souvent, cette *valeur* peut *varier* ; et la lettre s'appelle alors une **variable**.

IDENTITÉS REMARQUABLES DE DEGRÉ 2

factorisations →

$$\boxed{\begin{aligned} a^2+2ab+b^2 &= (a+b)^2 \\ a^2-2ab+b^2 &= (a-b)^2 \\ a^2-b^2 &= (a-b)(a+b) \end{aligned}}$$

sommes produits

← **développements**

DÉMONSTRATIONS

Elles sont très simples : comme susdit, on part du membre de *droite*, on applique la définition du carré d'un nombre, puis on *développe* terme à terme. Vous devez être capables de retrouver ainsi à tout moment les trois identités remarquables au cas où vous ayez des doutes.

$$\begin{aligned} (a+b)^2 &= (a+b)(a+b) \\ &= a^2+ab+ab+b^2 \\ &= \boxed{a^2+2ab+b^2} \end{aligned}$$

Même principe pour les deux autres identités.

LECTURE

La première identité se lira : « *a* **deux** plus deux *ab* plus *b* **deux** égale a-plus-b **au carré** ». (Voir explications dans le paragraphe sur les puissances.)

DOUBLE PRODUIT

On parle de **double produit** pour désigner le terme « 2*ab* » présent dans le *membre* de gauche des deux premières identités remarquables.

EXEMPLES

Voyons à présent comment ces identités remarquables vont fonctionner.

PREMIER EXEMPLE

On veut factoriser l'expression : x^2+6x+9.

Il faut d'abord mettre l'expression précisément sous la forme $a^2+2ab+b^2$.

$$\begin{aligned} x^2+6x+9 &= x^2+2\times x\times 3+3^2 \\ &= (x+3)^2 \end{aligned}$$

DEUXIÈME EXEMPLE

On veut factoriser l'expression : x^2-25.

$$\begin{aligned} x^2-25 &= x^2-5^2 \\ &= (x-5)(x+5) \end{aligned}$$

On a appliqué la transformation : $a^2-b^2 \to (a-b)(a+b)$, avec x dans le rôle de a, et 3 dans le rôle de b.

X. Inverse et opposé

Distinction

Dans la langue courante, « inverse » et « opposé » sont synonymes. Ce n'est pas le cas en mathématiques, où l'*opposé* se rapporte à l'addition alors que l'*inverse* concerne la multiplication.

Opposé

On obtient l'opposé d'un nombre en changeant son *signe* : l'opposé de -2 est $+2$.

Pour définir simplement l'opposé, on pourrait prendre le critère suivant :

Deux nombres sont **opposés** lorsque leur somme est nulle.

Opposé d'une somme

Comme nous l'avons déjà dit page 15, l'opérateur « opposé-de » se distribue sur les sommes algébriques. L'opposé d'une somme est égal à la somme des opposés :

$$-(+a\ -b\ +c) = -a\ +b\ -c$$

Opposé d'un produit

Mais pas sur les produits (ni sur les quotients) : en général, $-(AB) \neq (-A)(-B)$. Pour prendre l'opposé d'un produit, il suffit de

prendre l'opposé d'un seul de ses facteurs. Nous avons déjà vu cela page 15.

Inverse

Deux nombres sont **inverses** l'un de l'autre lorsque leur produit est égal à 1.

Pratique

On obtient l'inverse d'une fraction en inversant son numérateur et son dénominateur :

L'inverse de $\frac{a}{b}$ est $\frac{b}{a}$.

Expression

L'inverse de A peut s'écrire $\frac{1}{A}$.

Inverse d'une somme

L'inverse de la somme n'est pas la somme des inverses. Ainsi, l'inverse de $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$ n'est pas 2+3. Pour obtenir l'inverse de $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$, il vaut mieux commencer par calculer cette somme : $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{3}{6}+\frac{2}{6}=\frac{5}{6}$. Ensuite, il suffit d'inverser le numérateur et le dénominateur. Et l'on obtient $\boxed{\frac{6}{5}}$

XI. QUOTIENT

GÉNÉRALITÉS

$\boxed{\frac{a}{b} = a \div b}$. C'est pour cela que le trait de fraction a fini par remplacer le signe de la division. Lorsqu'on écrit « $\frac{0{,}5}{x+1}$ », ce n'est pas une fraction, c'est un quotient. Un quotient écrit avec un trait de fraction s'appelle une **écriture fractionnaire**.

SIMPLIFICATION

RÈGLE DE TRANSFORMATION

> On peut <u>diviser</u> (ou multiplier) par un même nombre le numérateur et le dénominateur d'une écriture fractionnaire sans changer sa valeur.

Exemples : $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

$$\frac{ab}{ac} = \frac{b}{c}$$

$$\frac{ab+ac}{ad} = \frac{a(b+c)}{ad} = \frac{b+c}{d}$$

SIMPLIFICATIONS SAUVAGES

- Et c'est le numérateur pris dans son entier, considéré globalement, qu'il faut diviser, non pas une partie seulement de celui-ci (idem pour le dénominateur, bien entendu). Voici une erreur courante : $\frac{ab+c}{ad+e} \rightsquigarrow \frac{b+c}{d+e}$. On pourra constater qu'en effet cette simplification est erronée sur le contre-exemple suivant :

$\frac{2\times4+14}{2\times5+1} \rightsquigarrow \frac{4+14}{5+1}$. Avant la simplification abusive, cette expression numérique vaut 2, alors qu'après, elle vaut 3.

- Autre erreur du même genre : $\frac{ab+ac}{ad} \rightsquigarrow \frac{b+ac}{d}$. Au dénominateur, supprimer le a permet bien de diviser par a. Mais au numérateur, supprimé le a n'a divisé par a que le « ab » et non l'ensemble du numérateur. Il aurait fallu, pour simplifier correctement, commencer par factoriser le numérateur :
$$\frac{ab+ac}{ad} = \frac{a(b+c)}{ad} = \frac{b+c}{d}$$

- On voit parfois des simplifications plus fantaisistes encore :

$$\frac{a^2}{b^2} \rightsquigarrow \frac{a}{b} \qquad \frac{a+d}{b+d} \rightsquigarrow \frac{a}{b}$$

- Une dernière pour la route : $\frac{a}{ab} = \frac{\cancel{a}}{\cancel{a}b} \rightsquigarrow b$.

Non, le numérateur ne s'anéantit pas au point de faire disparaître avec lui le trait de fraction (et de faire ainsi oublier que b est en position de dénominateur). Cette erreur est similaire à la disparition d'un signe moins observée page **Erreur ! Signet non défini.**. Rappelons que « barrer la même chose en haut et en bas » doit s'énoncer plus finement : en fait, on <u>divise</u> par le même nombre le numérateur et le dénominateur. Or le numérateur, divisé par lui-même, donne ce que donne tout nombre non nul divisé par lui-même : non pas *rien*, ni le nombre zéro (qui n'est déjà pas rien), mais le nombre **1**. Pour raconter les choses un peu autrement : $\frac{a}{ab} = \frac{a\times1}{a\times b} = \frac{\cancel{a\times}\,1}{\cancel{a\times}\,b} = \frac{\mathbf{1}}{b}$.

DISTRIBUTIONS NAÏVES

- Un facteur ne se distribue pas sur un quotient. Exemple d'erreurs :

  $2\times\dfrac{3}{7} \rightsquigarrow \dfrac{6}{14}$ $\qquad$ $k\times\dfrac{2}{2-k} \rightsquigarrow \dfrac{2k}{2k-k^2}$.

  Pour éviter ces erreurs, faire apparaître le dénominateur 1 :

  $2\times\dfrac{3}{7}=\dfrac{2}{\mathbf{1}}\times\dfrac{3}{7}=\dfrac{6}{7}$ $\qquad$ $k\times\dfrac{2}{2-k}=\dfrac{k}{\mathbf{1}}\times\dfrac{2}{2-k}=\dfrac{2k}{2-k}$

  Multiplier une fraction par un nombre revient donc à multiplier seulement son numérateur par ce nombre : $a\times\dfrac{b}{c} = \dfrac{ab}{c}$.

- Un diviseur ne se distribue pas sur un produit.

  L'égalité que nous venons de voir mérite d'être lue aussi dans l'autre sens : $\dfrac{ab}{c} = a\times\dfrac{b}{c}$. Alors, la transformation ainsi racontée pourrait se dire ainsi : diviser un produit par un nombre revient à diviser par ce nombre un seul de ses facteurs (cf. p**Erreur ! Signet non défini.**).

  Ainsi $\dfrac{2a}{3}$ est égal à $\dfrac{2}{3}a$ (qui se lit deux tiers **de** a). La seconde forme est souvent préférable.

  Sauriez-vous dire ce qu'on doit mettre à la place du « 2 » entouré, qui est erroné ?

  $\dfrac{(x-1)(x+1)}{2} \rightsquigarrow \dfrac{x-1}{2}\times\dfrac{x+1}{2}$

- Un *moins opposé* pouvant être vu comme un $(-1)\times$, il ne se distribue pas sur un quotient. Exemple d'erreur : $-\dfrac{a}{b} \rightsquigarrow \dfrac{-a}{-b}$.

  D'ailleurs, si c'était le cas, en lisant l'égalité de droite à gauche, on verrait que cela contredit la règle des signes du quotient. L'erreur est

similaire à la distribution abusive du signe moins sur le produit, déjà rencontrée pages 15 et 23. On l'évite ainsi :

$$-\frac{a}{b}=(-1)\times\frac{a}{b}=\frac{-1}{1}\times\frac{a}{b}=\frac{-a}{b}.$$

Le signe moins pourrait tout aussi bien passer au dénominateur.

PARENTHÈSES

PARENTHÈSES IMPLICITES

Le trait de fraction joue un rôle de parenthèses :

$\dfrac{a-b}{c-d}+e$ $\qquad$ signifie $\qquad$ $\left[\dfrac{(a-b)}{(c-d)}\right]+e$.

Le dédain à l'égard de ces parenthèses implicites est source d'une erreur fréquente en seconde : $\dfrac{1}{a}-\dfrac{1-a}{a} \rightsquigarrow \dfrac{1-1-a}{a}=\dfrac{-a}{a}=-1$

Alors qu'en explicitant dès le début les parenthèses, l'erreur peut être évitée : $\dfrac{1}{a}-\dfrac{(1-a)}{a}=\dfrac{1-(1-a)}{a}=\dfrac{1-1+a}{a}=\dfrac{a}{a}=1$.

AMBIGUÏTÉ

Il faut veiller à ce que la taille et la position du trait de fraction indiquent clairement ce que l'on veut exprimer.

- $\dfrac{a}{b}\ +c$ $\qquad$ pourrait signifier aussi bien $\dfrac{a}{b}+c$ que $\dfrac{a+c}{b}$

- $\dfrac{a}{\dfrac{b}{c}}$ pourrait signifier $\dfrac{\frac{a}{b}}{c}$ ou bien $\dfrac{a}{\frac{b}{c}}$.

  Dans ce souci d'éviter l'ambiguïté, le trait de fraction principal, en plus d'être plus long que les autres, doit se situer au niveau de la ligne d'écriture.

QUOTIENT DE FRACTIONS

Rappelons que nous avons commencé par présenter l'*inverse* comme étant le nombre qui « fait le contraire » du point de vue de la multiplication (p24). Par conséquent :

> Diviser <u>par</u> un nombre revient à multiplier par son inverse.

Ce théorème peut servir à calculer un quotient de fractions, en les ramenant à des produits de fractions :

$$\frac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{7}}=\frac{2}{3}\times\frac{7}{5}=\frac{14}{15}$$

Pour comprendre ce qui s'est passé, il faut voir le grand trait de fraction central comme un signe de division (mais les deux autres comme de simples traits de fraction) : diviser <u>par</u> $\frac{5}{7}$ revient à multiplier par $\frac{7}{5}$.

Nous avons vu, page 24, que l'inverse d'une somme n'était pas la somme des inverses. Cette distribution naïve de l'opérateur « inverse-de » provoque des erreurs du genre : $\frac{1}{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}} \leadsto 1\times(2+3)=5$

La même erreur pourrait aussi être provoquée par une distribution naïve d'un numérateur sur une somme :

$$\frac{1}{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}} \leadsto \frac{1}{\frac{1}{2}}+\frac{1}{\frac{1}{3}}=2+3=5.$$

L'erreur effective peut être un mélange des deux : une erreur a parfois

plusieurs raisons d'advenir. On pourrait dire qu'alors l'erreur est « surdéterminée ».

Pour calculer l'inverse d'une somme, il faut d'abord calculer cette somme : $\frac{1}{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}=\frac{1}{\frac{5}{6}}=\frac{6}{5}$

DIVISER PAR 0

Quotient vient du latin *quotiens*, qui signifie *combien de fois*. Le *quotient* est le *nombre de fois* que le dividende contient le diviseur. La division est ainsi définie mathématiquement comme *opération inverse* de la multiplication : lorsqu'on multiplie le diviseur par le quotient, on doit retrouver le dividende.

$$\begin{array}{c|c} 2 & 0 \\ \cline{2-2} & q \end{array}$$

Par conséquent, si $\frac{2}{0}$ (deux divisé par zéro) était égal à un quotient q, il faudrait que $q\times 0=2$, ce qui n'est pas possible. Donc $\frac{2}{0}$ n'existe pas. Quand au cas de $\frac{0}{0}$, on tombe sur le problème inverse : tous les quotients pourraient convenir. Ne sachant lequel choisir, on n'en admet aucun. Donc « $\frac{a}{0}$ » n'a jamais de sens : on ne peut pas diviser <u>par</u> zéro.

Dans ce chapitre de révisions, pour ne pas alourdir le texte, lorsqu'un dénominateur est écrit, il est implicitement supposé non nul. Rigoureusement, il faudrait le préciser à chaque fois.

On ne peut pas diviser par zéro, mais on peut diviser zéro : $\frac{0}{2}=0$.

D'ailleurs, un quotient ne s'annule que si son numérateur s'annule. Disons-le d'un style plus mathématique : un quotient s'annule si, et seulement si son numérateur s'annule : $\frac{a}{b}=0 \iff a=0$.

Alors qu'un produit s'annule si, et seulement si l'un de ses facteurs s'annule : $ab=0 \iff (a=0 \quad \text{ou} \quad b=0)$.

Deux remarques de *logique mathématique* au passage :

L'ÉQUIVALENCE LOGIQUE

Le signe « $\Leftrightarrow$ » se lit « équivaut à ». Il se met entre deux *affirmations mathématiques*, pour dire qu'elles sont **équivalentes**, c'est-à-dire qu'elles sont vraies en même temps et fausses en même temps. Il a le même sens qu'un « si, et seulement si ».

LE « OU » MATHÉMATIQUE.

Le « ou » de la langue courante est plutôt un ou *exclusif*. C'est-à-dire un « ou » dans lequel chaque possibilité offerte *exclue* l'autre. Ainsi, dans la phrase : « Il faut choisir : tu entres ou tu sors ! », on imagine mal que le locuteur envisage d'offrir à son interlocuteur la possibilité de sortir et d'entrer à la fois : au contraire, il manifeste que si c'est l'un, c'est pas l'autre.

Le « ou » mathématique, en revanche, est *inclusif*, c'est-à-dire un « ou » qui inclut le « et ». C'est un « *ou* ou *et* ». L'affirmation « $a=0$ ou $b=0$ » est donc (encore) considérée comme vraie, même lorsque les variables a et b s'annulent toutes deux.

XII. RACINE

GÉNÉRALITÉS

RACINE CARRÉE

Dans ce paragraphe, *racine* signifiera *racine carrée*, c'est-à-dire en fait racine *du* carré : ce qu'il y avait au début, à la racine, avant qu'on élevât au carré.

DÉFINITION

La **racine** d'un nombre A est le nombre positif dont le carré est égal à A.

EXEMPLE

Trois est la racine de neuf, car neuf est le carré de trois.

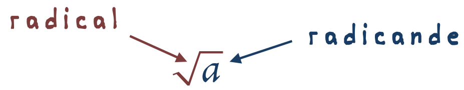
$$3 \underset{\text{racine}}{\overset{\text{carré}}{\rightleftarrows}} 9$$

THÉORÈME

Tout réel positif admet une unique racine.

NOTATION

Radical



Le **radical** est le « signe racine ». Le **radicande** est ce qu'il y a dessous : le nombre dont on prend la racine. C'est parce que nous avons préalablement démontré l'unicité de la racine qu'une telle notation est possible.

Ambiguïté

Le trait supérieur du *radical* joue un rôle de parenthèses. Il était d'ailleurs utilisé en ce sens par certains mathématiciens, avant que les parenthèses ne s'imposassent. Ainsi : $2\times\overline{2+1}$ signifiait $2\times(2+1)$. Il faut donc veiller à ce que ce trait supérieur couvre exactement le terme dont on veut prendre la racine et éviter une écriture ambiguë comme : $\sqrt{4+\ }5$, donc on ne sait si elle signifie $\sqrt{4}+5$, c'est-à-dire 7, ou bien $\sqrt{4+5}$, c'est-à-dire 3. Parfois, on termine ce trait en redescendant, de façon à bien marquer l'endroit où il s'arrête : $\sqrt{a+b}+c$.

IRRATIONALITÉ

Les racines incalculables

Certaines racines, à commencer par $\sqrt{2}$, sont « incalculables » : elles ne peuvent s'écrire sans radical. Plus précisément, $\sqrt{2}$ ne peut s'écrire sous forme de fraction : c'est ce qu'on appelle un nombre **irrationnel**. Les nombres **rationnels** étant, au contraire, ceux qui peuvent s'écrire sous forme de fraction. Les nombres *irrationnels* ont une écriture décimale infinie et non **périodique**. Une écriture décimale est dite *périodique*, lorsqu'à partir d'un certain endroit, elle se répète indéfiniment. Exemple : $12{,}48181818\overline{81}\ldots$

La **valeur exacte** de $\sqrt{2}$, c'est $\sqrt{2}$.

Théorème

> Lorsque n est un entier naturel, $\sqrt{n}$ est soit un entier soit un *irrationnel*.

<u>Exemples</u>

$\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$ sont des nombres *irrationnels*.

MONÔME

De même que $5\times a$ s'écrit $5a$ et que $a\times b$ s'écrit ab,

$\boxed{5\times\sqrt{2} \text{ s'écrit } 5\sqrt{2}}$.

Il s'agit de voir « $5\sqrt{2}$ » un peu comme « $5a$ », c'est-à-dire comme un *monôme* (voir page 11).

C'est une expression qu'on ne peut pas réduire. (On pourrait certes l'écrire $\sqrt{18}$, mais nous verrons que ce n'est pas souhaitable.)

Il est bon de voir des expressions comme $5\sqrt{2}$ ou $7\sqrt{5}$ comme des *monômes* dont l'unité n'est pas littérale, mais est une racine. On pourra parler d'**« unité irrationnelle »**. De cette façon, il est évident que $5\sqrt{\mathbf{2}}+3\sqrt{\mathbf{2}} = \boxed{8\sqrt{2}}$. Sur le modèle : $5\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{a}=\boxed{8\boldsymbol{a}}$. Et si ce n'était pas évident, on pourrait toujours proposer une petite factorisation en étape intermédiaire :

$$5\sqrt{\mathbf{2}}+3\sqrt{\mathbf{2}} = (5+3)\sqrt{\mathbf{2}} = \boxed{8\sqrt{\mathbf{2}}}$$

Une somme de monômes d'unités différentes, comme $3\sqrt{\mathbf{2}}+7\sqrt{\mathbf{5}}$ est *irréductible*. Sauf qu'il arrive parfois que l'on puisse « convertir » certaines racines en d'autres. Par exemple, nous allons bientôt voir que $\sqrt{8}$ peut s'écrire $2\sqrt{2}$. Alors, une somme comme $3\sqrt{\mathbf{2}}+2\sqrt{\mathbf{8}}$ pourra être réduite. Pour cela, il faut d'abord prouver que le radical se distribue sur le produit.

DISTRIBUTION

Le radical se distribue sur les produits et les quotients (mais pas sur les sommes).

Autrement dit, la racine du produit est égale au produit des racines, mais la racine de la somme n'est pas égale à la somme des racines.
Présentons les choses littéralement : soient a et b deux réels positifs (avec b non nul dans le second cas) :

$$\sqrt{ab}=\sqrt{a}\sqrt{b} \qquad \sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

Mais en général : $\sqrt{a+b}\neq\sqrt{a}+\sqrt{b}$

En effet, voici un contre-exemple : $\sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$

$\sqrt{9}+\sqrt{16} = 3+4 = 7$

« SORTIR LES FACTEURS CARRÉS »

La distribution du radical sur les produits permet de « sortir du radical les <u>facteurs</u> carrés » qui sont « cachés » dans le *radicande* :

$$\sqrt{8}=\sqrt{4\times2}=\sqrt{4}\times\sqrt{2}=2\times\sqrt{2}=\boxed{2\sqrt{2}}$$

Pour repérer facilement les <u>facteurs</u> carrés « cachés » dans le *radicande*, on peut le *décomposer en facteurs premiers* (voir page 6).
Voyons cela sur un exemple :

$$\begin{aligned}\sqrt{108} &= \sqrt{2\times2\times3\times3\times3}\\ &= \sqrt{2^2\times3^2\times3}\\ &= \sqrt{2^2}\times\sqrt{3^2}\times\sqrt{3}\\ &= 2\times3\times\sqrt{3}\\ &= \boxed{6\sqrt{3}}\end{aligned}$$

SOMME DE RACINES

INTÉRÊT

L'intérêt de « sortir les carrés de la racine », c'est que cela permet de réduire certaines sommes de racines qu'on aurait pu croire irréductibles. Exemple : on veut tenter de réduire $\sqrt{18}+\sqrt{8}$.

MÉTHODE

Pour commencer, on résiste à la « simili factorisation naïve » (p**Erreur ! Signet non défini.**) du radical. Je veux dire par là qu'on évite de prétendre que ça ferait $\sqrt{26}$. Ensuite, il n'est pas certain *a priori* qu'on pourra réduire la somme de ces deux racines. Mais on peut tenter de le faire, en « sortant les facteurs carrés » :

$$\begin{aligned}\sqrt{18}+\sqrt{8} &= \sqrt{9\times2}+\sqrt{4\times2}\\ &= \sqrt{9}\times\sqrt{2} + \sqrt{4}\times\sqrt{2}\end{aligned}$$

$$= 3\sqrt{2} + 2\sqrt{2}$$
$$= \boxed{5\sqrt{2}}$$

Irréductibilité

Si, après avoir « sorti les carrés », les monômes-racines n'ont pas la même unité, alors leur somme est irréductible.

Par exemples, $3\sqrt{5}+4\sqrt{10}+2\sqrt{13}$ est *irréductible*. C'est un *théorème* que nous admettons ici car, comme celui de la page 34, sa démonstration requiert elle-même quelques théorèmes d'*arithmétique* qui ne sont pas abordés en seconde.

Racine d'une somme

La racine de la somme n'est pas la somme des racines. Il est certes parfois tentant de distribuer un radical sur une somme, par exemple dans l'expression : $\sqrt{a^2+b^2}$ (erreur déjà rencontrée page 17). Si d'ailleurs une telle distribution était possible, on pourrait simplifier singulièrement le théorème de Pythagore, en enlevant les carrés de son égalité… Inversement, comme nous venons de le voir, on pourrait facilement se laisser aller à une erreur du genre : $\sqrt{18}+\sqrt{8} \not\to \sqrt{18+8} = \sqrt{26}$. Un **contre-exemple** ne suffira sans doute pas à éliminer « radicalement » ces erreur, mais en voici un quand même :

- racine de la somme : $\sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$
- somme des racines : $\sqrt{16}+\sqrt{9} = 4+3 = 7$

Les radicaux au dénominateur

Une racine

Que ce soit dans une expression numérique ou algébrique, il est

important de se débarrasser des radicaux au dénominateur car cela permet souvent de remarquer des simplifications qui seraient passées inaperçues autrement. Il est toujours possible d'éliminer les radicaux au dénominateur :

Lorsque le dénominateur est lui-même une racine, il suffit de multiplier « en haut et en bas » par cette racine :

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \boxed{\frac{1}{2}\sqrt{2}}$$

Une somme de racines

Si le dénominateur est une somme contenant une racine (ou plusieurs), on peut multiplier cette somme par sa **quantité conjuguée**. La quantité conjuguée de « ✷ + ⬟ » est tout bêtement « ✷ − ⬟ ». Exemple :

$$\frac{1}{\sqrt{2}+1} = \frac{1\times\left(\sqrt{2}-1\right)}{\left(\sqrt{2}+1\right)\times\left(\sqrt{2}-1\right)} = \frac{\sqrt{2}-1}{2-1} = \frac{\sqrt{2}-1}{1} = \boxed{\sqrt{2}-1}$$

Cette astuce fort utile repose sur la troisième identité remarquable.

Racine d'une fraction

Lorsqu'il y a une racine de fraction, on peut toujours s'arranger pour n'avoir plus qu'une racine d'entier dans l'expression : on distribue le radical sur le quotient et l'on se ramène ainsi au cas du paragraphe précédent :

$$\sqrt{\frac{8}{3}} = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{2}\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{6}}{3} = \boxed{\frac{2}{3}\sqrt{6}}$$

FORME « NORMALISÉE »

Autant que possible, une expression numérique est à mettre par ordre de priorité sous la forme :

Exemples :

• D'un entier	5
• D'une fraction irréductible	$\frac{2}{3}$
• $n\sqrt{p}$, où n et p sont des entiers et où p le plus petit possible. Autrement dit, il faut « sortir les facteurs carrés de la racine ».	$3\sqrt{2}$
• $\frac{n}{d}\sqrt{p}$, où $\frac{n}{d}$ est une fraction irréductible et p un entier le plus petit possible (ou éventuellement $\frac{\sqrt{p}}{d}$, ni n vaut 1).	$\frac{2}{3}\sqrt{5}$
• D'une somme d'expressions des formes précédentes.	$2\sqrt{3}+\frac{3}{4}\sqrt{2}$

EN RÉSUMÉ

On sort un maximum de carrés du radical et l'on se débarrasse des racines au dénominateur.

RACINE CUBIQUE

On généralise la notion de racine *carrée* à d'autres puissances. Ainsi, la racine *cubique* de a est le réel dont le cube est égal à a. On le note $\sqrt[3]{a}$. On a par exemple : $\sqrt[3]{8}=2$. Les nombres négatifs ont des racines cubiques. Par exemple, $\sqrt[3]{-8}=-2$ car $-8=(-2)^3$.

XIII. PUISSANCE

PRÉSENTATION

CAS CLASSIQUE

$$2^5=\underbrace{2\times2\times2\times2\times2}_{\text{5 facteurs}}$$

Une *puissance* est d'abord une façon de noter un « *poly-produit* » (p**Erreur ! Signet non défini.**) dont tous les termes sont égaux : *aaaaaaaaaaa* peut s'écrire a^{11}, qu'on lit « a puissance onze » ou encore, de façon abrégée : « a onze ».

EXPOSANT NÉGATIF

Lorsqu'on change l'exposant en son *opposé*, la puissance (le résultat) est changée en son *inverse*.

Exemple : $2^{+3} = 2\times2\times2 = 8$ donc $2^{-3} = \dfrac{1}{8}$.

DÉFINITION

Quels que soient le réel a et l'entier naturel n non-nul :

Puissance d'exposant positif : $a^n = \underbrace{aa...a}_{n\text{ facteurs}}$

$a^1 = a$

Puissance d'exposant négatif : $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$ (lorsque $a\neq0$)

Puissance d'exposant nul : $a^0 = 1$ (lorsque $a\neq0$)

0^0 n'est pas défini.

Dans « a^n », n est l'**exposant** et a n'ayant pas de nom officiel je propose de l'appeler la **« base »**. L'opération en elle-même s'appelle l'**exponentiation**. Le résultat est la **puissance**.

LECTURE

a^2 peut se lire « a puissance deux » , « a deux » ou « a au carré ».

On n'écrit jamais le coefficient derrière la variable, comme dans « $a2$ », car la lecture orale « a deux » serait alors ambiguë : on ne saurait si le « deux » est un exposant ou un facteur. Placé après la variable, c'est toujours un exposant.

Sans que ce soit toujours conscient, l'habitude est prise, en mathématiques (et il est fortement recommandé de la suivre), de lire :

a^2+b^2 : « a **deux** plus b **deux** »

$(a+b)^2$: « a plus b … **au carré** ».

«Au carré » connote l'élévation du tout au carré, alors que « deux », qui ne prend qu'une syllabe, donnera plutôt l'impression de ne concerner que le dernier terme.

PRIORITÉ

Par convention, l'exposant est prioritaire sur tous les autres opérateurs, il ne concerne donc que le terme qui le précède (cf p**Erreur ! Signet non défini.**) :

$-a^2$ signifie $-aa$ et non $(-a)(-a)$.

Remarquons que $-aa$ peut aussi bien se lire $-(aa)$ que $(-a)a$

$2a^3$ signifie $2aaa$ et non $(2a)(2a)(2a)$

$-2(x-1)^2$ signifie $-2(x-1)(x-1)$

Si l'on veut calculer $-a^2$ lorsque a vaut -2, il faut remplacer a par -2, mais avec un peu de méticulosité. En effet, il y a deux signes *moins* : celui qui est devant le a^2 et celui qui est à l'intérieur du a. Le carré va s'appliquer au signe *moins* qui est à l'intérieur du a, mais par à celui qui est devant : $-a^2 = -\left[(-2)^2\right] = -(+4) = \boxed{-4}$.

OPÉRATIONS SUR LES PUISSANCES

$\boxed{a^n\times a^p = a^{n+p}}$ $\boxed{\dfrac{1}{a^p} = a^{-p}}$ $\boxed{\dfrac{a^n}{a^p} = a^{n-p}}$

$\boxed{(ab)^n = a^nb^n}$ $\boxed{\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}}$ $\boxed{\left(a^n\right)^p = a^{n\times p}}$

PUISSANCE -1

$a^{-1} = \dfrac{1}{a}$. Donc a^{-1} est l'*inverse* de a.

Puissance 1/2

Les radicaux se distribuent sur les produits : $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$. Or il vient d'être dit (p**Erreur ! Signet non défini.**) que se distribuer sur les produits était la particularité des *exposants*. Serait-ce qu'un *radical* est un *exposant* ? Eh bien oui, les mathématiciens ont eu beaucoup de bonnes raisons de considérer que prendre la racine, revenait à élever à la puissance $\frac{1}{2}$: $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$.

Ambiguïté

Il faut éviter des écritures ambiguës comme : $\frac{a}{b}^{n}$, car on ne sait pas si l'exposant n porte sur le numérateur : $\frac{a^n}{b}$; ou s'il porte sur tout le quotient : $\left(\frac{a}{b}\right)^n$.

XIV. Valeur absolue

Absolu/relatif

Un nombre relatif se décompose en deux éléments : son **signe** et sa **valeur absolue** :

signe	valeur absolue
$-$	5
$+$	3

Absolu s'oppose à *relatif*. Les nombres inventés d'abord, qu'on pourrait dire « naturels » (même si l'on ne trouve pas de nombres en tant que tels dans la nature), ont une valeur en soi, sans référence à un autre nombre. Mais les nombres relatifs sont placés <u>relativement</u> au

nombre *zéro*. « -5 », c'est 5 unités au dessous de zéro. Un nombre relatif est formé à partir d'un nombre « naturel », auquel on adjoint un signe, pour indiquer dans quel sens on s'est déplacé à partir de zéro.

Définition informelle

La valeur absolue, c'est le nombre « sans son signe ».

Opérateur

On peut considérer « valeur absolue » comme un *opérateur* qui « arrache » son signe à un nombre relatif.

Notation

La valeur absolue de a se note : $|a|$. On lit : « valeur absolue de a ».On peut ainsi écrire :

$$|-5| = 5$$
$$|+5| = 5$$

Identification

Mais, puisque les nombres positifs sont *identifiés* aux nombres « naturels » (on confond 1 et +1), on peut dire aussi que l'opérateur valeur absolue « positive » un nombre :

$$|-5| = +5$$
$$|+5| = +5$$

De ce point de vue, l'opérateur *valeur absolue* laisse comme ils sont les nombres positifs, mais prend l'opposé des négatifs, afin de les « positiver ».C'est pourquoi, la définition donnée dans les livres de mathématiques est souvent :

Définition officielle

Soit a un réel. Si $a \geq 0$, $|a| = a$
Si $a < 0$, $|a| = -a$

opposé de

(Si a est positif, on n'y touche pas. S'il est négatif, on en prend l'opposé, de façon à le rendre positif.)

REMARQUES

$-a$ n'est pas forcément un nombre négatif. « $-a$ » signifie l'opposé de a. Si a est négatif, c'est-à-dire si la lettre a « contient un signe moins », l'opposé de a est alors positif.

$\sqrt{a^2} = |a|$. En revanche, $\left(\sqrt{a}\right)^2$ n'existe que si a est positif.